

## MC448 — Análise de Algoritmos I

Cid Carvalho de Souza Cândia Nunes da Silva  
Orlando Lee

15 de setembro de 2009

### Resolução de Recorrências

- Relações de recorrência expressam a complexidade de algoritmos recursivos como, por exemplo, os algoritmos de divisão e conquista.
- É preciso saber resolver as recorrências para que possamos efetivamente determinar a complexidade dos algoritmos recursivos.

### Recorrências

### Mergesort

Vamos começar revendo um famoso algoritmo de ordenação, o **Mergesort**.

O **Mergesort** usa a subrotina *Intercala*( $A, p, q, r$ ) que tem

**Entrada:** um vetor  $A[p \dots r]$  e um índice  $q$  tais que  $A[p \dots q]$  e  $A[q+1 \dots r]$  estão em **ordem crescente** e

**Saída:** o vetor  $A[p \dots r]$  em **ordem crescente**.

## Intercala

Exemplo:

Entrada:

A	$p$			$q$				$r$	
	22	33	55	77	99	11	44	66	88

Saída:

A	$p$			$q$				$r$	
	11	22	33	44	55	66	77	88	99

**Exercício.** Escreva uma rotina INTERCALA com complexidade de tempo **linear**.

## Mergesort

O **Mergesort** é um algoritmo que usa o método de **divisão-e-conquista**.

A idéia é muito simples:

- divida o vetor em dois subvetores de tamanho quase iguais (**divisão**),
- ordene cada subvetor **recursivamente**, e
- use **INTERCALA** para ordenar o vetor (**conquista**).

## Corretude do Mergesort

```
MERGESORT(A, p, r)
1  se p < r
2    então q ← ⌊(p+r)/2⌋
3    MERGESORT(A, p, q)
4    MERGESORT(A, q+1, r)
5    INTERCALA(A, p, q, r)
```

**O algoritmo está correto?**

A corretude do algoritmo **Mergesort** apoia-se na corretude do algoritmo **Intercala** e pode ser demonstrada **por indução** em  $n := r - p + 1$  (**Exercício**).

## Mergesort

```
MERGESORT(A, p, r)
1  se p < r
2    então q ← ⌊(p+r)/2⌋
3    MERGESORT(A, p, q)
4    MERGESORT(A, q+1, r)
5    INTERCALA(A, p, q, r)
```

**Qual é a complexidade de MERGESORT?**

Seja  $T(n) :=$  o consumo de tempo **máximo** (pior caso) em função de  $n = r - p + 1$

## Complexidade do Mergesort

```
MERGESORT(A, p, r)
1  se p < r
2    então q ← [(p+r)/2]
3    MERGESORT(A, p, q)
4    MERGESORT(A, q+1, r)
5    INTERCALA(A, p, q, r)
```

linha	consumo de tempo
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?

$T(n) = ?$

## Complexidade do Mergesort

```
MERGESORT(A, p, r)
1  se p < r
2    então q ← [(p+r)/2]
3    MERGESORT(A, p, q)
4    MERGESORT(A, q+1, r)
5    INTERCALA(A, p, q, r)
```

linha	consumo de tempo
1	$b_0$
2	$b_1$
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$an$

$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + (b_0 + b_1)$

## Resolução de recorrências

- Queremos resolver a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + b \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

- Resolver uma recorrência significa encontrar uma **fórmula fechada** para  $T(n)$ .
- Não é necessário achar uma **solução exata**. Basta encontrar uma função  $f(n)$  tal que  $T(n) \in \Theta(f(n))$ .

## Resolução de recorrências

Alguns métodos para resolução de recorrências:

- substituição
- iteração
- árvore de recorrência

Veremos também um resultado bem geral que permite resolver várias recorrências: **Teorema Master**.

## Método da substituição

- Idéia básica: “adivinha” qual é a solução e prove por **indução** que ela funciona!
- Método poderoso mas nem sempre aplicável (obviamente).
- Com prática e experiência fica mais fácil de usar!

## Exemplo

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 3 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\ &\leq 3 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + 3 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\ &= 3 \left( \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lg n - 3 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\ &= 3n \lg n - 3 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\ &\leq 3n \lg n. \end{aligned}$$

(YeEEEEEESSSSS!)

## Exemplo

Considere a recorrência:

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Chuto que  $T(n) \in O(n \lg n)$ .

Mais precisamente, chuto que  $T(n) \leq 3n \lg n$ .

(Lembre que  $\lg n = \log_2 n$ .)

## Exemplo

- **Mas espere um pouco!**
- $T(1) = 1$  e  $3 \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$  e a base da indução não funciona!
- Certo, mas lembre-se da definição da classe  $O$ .

Só preciso provar que  $T(n) \leq 3n \lg n$  para  $n \geq n_0$  onde  $n_0$  é alguma constante.

Vamos tentar com  $n_0 = 2$ . Nesse caso, é preciso verificar que vale a “base” para  $n = 2, 3$  (**por quê?**):

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 4 \leq 3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6,$$

$$T(3) = T(2) + T(1) + 3 = 8 \leq 3 \cdot 3 \cdot \lg 3.$$

## Exemplo

- Certo, funcionou para  $T(1) = 1$ .
- Mas e se por exemplo  $T(1) = 8$ ?  
Então  $T(2) = 8 + 8 + 2 = 18$  e  $3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$ .  
Não deu certo. . .
- Certo, mas aí basta escolher uma constante maior.  
Mostra-se do mesmo jeito que  $T(n) \leq 10n \lg n$ .  
Para esta escolha temos  $T(2) = 18 \leq 10 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 20$  e  
 $T(3) = 18 + 8 + 3 = 29 \leq 10 \cdot 3 \cdot \lg 3$ .
- De modo geral, se o passo de indução funciona ( $T(n) \leq cn \lg n$ ), é sempre possível escolher  $c$  e  $n_0$  de modo conveniente!

## Como achar as constantes?

- Tudo bem. Dá até para chutar que  $T(n)$  pertence a classe  $O(n \lg n)$ .
- Mas como descobrir que  $T(n) \leq 3n \lg n$ ? Como achar a constante 3?
- Eis um método simples: suponha como hipótese de indução que  $T(n) \leq cn \lg n$  para  $n \geq n_0$  onde  $c$  e  $n_0$  são constantes que vou tentar determinar.

## Primeira tentativa

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\ &\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg n + n \\ &= c \left( \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lg n + n \\ &= cn \lg n + n \end{aligned}$$

(Hummm, não deu certo...)

## Segunda tentativa

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\ &\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\ &= c \left( \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lg n - c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\ &= cn \lg n - c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\ &\leq cn \lg n. \end{aligned}$$

Para garantir a última desigualdade basta que  $-c \lfloor n/2 \rfloor + n \leq 0$ . Ela vale para  $c \geq 3$  e  $n \geq 2$ .  
(YeEEEEEESSSSS!)

## Segunda tentativa

Note que a escolha da constante  $c$  deve levar em conta os valores da “base”. O que é a base depende do valor  $n_0$  escolhido.

Como foi dito antes, em geral é suficiente escolher  $c$  grande o suficiente para garantir isto.

## Como chutar?

Não há nenhuma receita genérica para adivinhar soluções de recorrências. A experiência é o fator mais importante.

Felizmente, há várias idéias que podem ajudar.

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Ela é quase idêntica à anterior e podemos chutar que  $T(n) \in \Theta(n \lg n)$ . Isto de fato é verdade. (Exercício ou consulte o CLRS)

## Completando o exemplo

Mostramos que a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

satisfaz  $T(n) \in O(n \lg n)$ .

Mas quem garante que  $T(n)$  não é “menor”?

O melhor é mostrar que  $T(n) \in \Theta(n \lg n)$ .

Resta então mostrar que  $T(n) \in \Omega(n \lg n)$ . A prova é similar. (Exercício!)

## Como chutar?

Considere agora a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Ela parece bem mais difícil por causa do “17” no lado direito.

Intuitivamente, porém, isto não deveria afetar a solução. Para  $n$  **grande** a diferença entre  $T(\lfloor n/2 \rfloor)$  e  $T(\lfloor n/2 \rfloor + 17)$  não é tanta.

Chuto então que  $T(n) \in \Theta(n \lg n)$ . (Exercício!)

## Truques e sutilezas

Algumas vezes adivinhamos corretamente a solução de uma recorrência, mas as contas aparentemente não funcionam! Em geral, o que é necessário é fortalecer a **hipótese de indução**.

Considere a recorrência

$$\begin{aligned}T(1) &= 1 \\T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \quad \text{para } n \geq 2.\end{aligned}$$

Chutamos que  $T(n) \in O(n)$  e tentamos mostrar que  $T(n) \leq cn$  para alguma constante  $c$ .

$$\begin{aligned}T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\&\leq c\lceil n/2 \rceil + c\lfloor n/2 \rfloor + 1 \\&= cn + 1.\end{aligned}$$

(Humm, falhou...)

E agora? Será que erramos o chute? Será que  $T(n) \in \Theta(n^2)$ ?

## Método da iteração

- Não é necessário adivinhar a resposta!
- Precisa fazer mais contas...
- Idéia: expandir (iterar) a recorrência e escrevê-la como uma somatória de termos que dependem apenas de  $n$  e das **condições iniciais**.
- Precisa conhecer limitantes para várias somatórias.

## Truques e sutilezas

Na verdade, adivinhamos corretamente. Para provar isso, é preciso usar uma **hipótese de indução mais forte**.

Vamos mostrar que  $T(n) \leq cn - b$  onde  $b > 0$  é uma constante.

$$\begin{aligned}T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\&\leq c\lceil n/2 \rceil - b + c\lfloor n/2 \rfloor - b + 1 \\&= cn - 2b + 1 \\&\leq cn - b\end{aligned}$$

onde a última desigualdade vale se  $b \geq 1$ . (Yeeesssss!)

Para que a recorrência valha, basta escolher  $c$  suficientemente grande para satisfazer os valores na “base”.

## Algumas somatórias

- Soma dos termos de uma P.A. de razão  $r$  com  $n$  termos:

$$a + (a+r) + (a+2r) + \dots + (a+(n-1)r) = an + \frac{r(n-1)n}{2}.$$

- Soma dos termos de uma P.G. de razão  $q$  com  $n$  termos:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

- Soma dos termos de uma P.G. infinita de razão  $q$  ( $0 < q < 1$ ):

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n + \dots = \frac{a}{1-q}.$$

## Método da iteração

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= b && \text{para } n \leq 3, \\ T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n && \text{para } n \geq 4. \end{aligned}$$

Iterando a recorrência obtemos

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\ &= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3(\lfloor n/16 \rfloor + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\ &= n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 9\lfloor n/16 \rfloor + 27T(\lfloor n/64 \rfloor). \end{aligned}$$

Certo, mas quando devo parar?

O  $i$ -ésimo termo da série é  $3^i \lfloor n/4^i \rfloor$ . Ela termina no  $j$ -ésimo termo em que  $\lfloor n/4^j \rfloor \leq 3$ . Note que  $j \leq \log_4 n$ .

## Método da iteração

$$\begin{aligned} T(n) &\leq n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 9\lfloor n/16 \rfloor + 27T(\lfloor n/64 \rfloor) + \dots + 3^j b \\ T(n) &\leq n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \dots + 3^{\log_4 n} b \\ &\leq n \cdot (1 + 3/4 + 9/16 + 27/64 + \dots) + bn^{\log_4 3} \\ &\leq n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + bn^{\log_4 3} \\ &= 4n + bn^{\log_4 3} \end{aligned}$$

pois  $j \leq \log_4 n$  e  $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$  para  $0 < q < 1$ .

Como  $\log_4 3 < 1$  segue que  $n^{\log_4 3} \in o(n)$  e logo,  $T(n) \in O(n)$ .

## Método de iteração

- As contas ficam mais simples se supormos que a recorrência está definida apenas para potências de um número, por exemplo,  $n = 4^i$ .
- Note, entretanto, que a recorrência deve ser provada para todo natural suficientemente grande.
- Muitas vezes, é possível depois de iterar a recorrência, **adivinhar** a solução e usar o método da substituição!

## Método de iteração

$$\begin{aligned} T(n) &= b && \text{para } n \leq 3, \\ T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n && \text{para } n \geq 4. \end{aligned}$$

Chuto que  $T(n) \leq cn$ .

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n \\ &\leq 3c\lfloor n/4 \rfloor + n \\ &\leq 3c(n/4) + n \\ &\leq cn \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vale se  $c \geq 4$ .

(Yeeessss!)

## Árvore de recorrência

- Permite visualizar melhor o que acontece quando a recorrência é iterada.
- É mais fácil organizar as contas.
- Útil para recorrências de algoritmos de divisão-e-conquista.

## Árvore de recorrência

### Simplificação

Vamos supor que a recorrência está definida apenas para potências de 4

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(1) && \text{para } n = 1, \\ T(n) &= 3T(n/4) + cn^2 && \text{para } n = 4, 16, \dots, 4^i, \dots \end{aligned}$$

Isto permite descobrir mais facilmente a solução. Depois usamos o método da substituição para formalizar.

## Árvore de recorrência

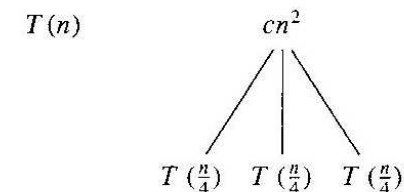
Considere a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(1) && \text{para } n = 1, 2, 3, \\ T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 && \text{para } n \geq 4, \end{aligned}$$

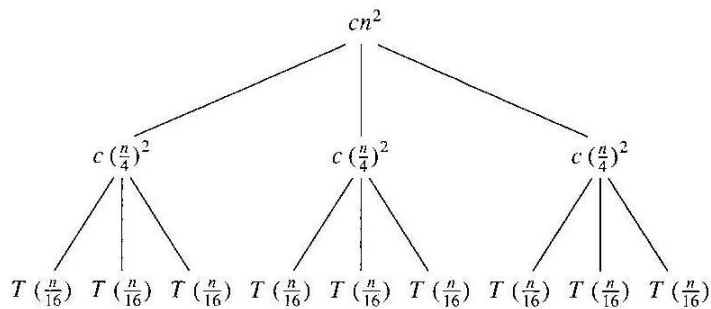
onde  $c > 0$  é uma constante.

Costuma-se usar a notação  $T(n) = \Theta(1)$  para indicar que  $T(n)$  é uma constante. (CLRS)

## Árvore de recorrência



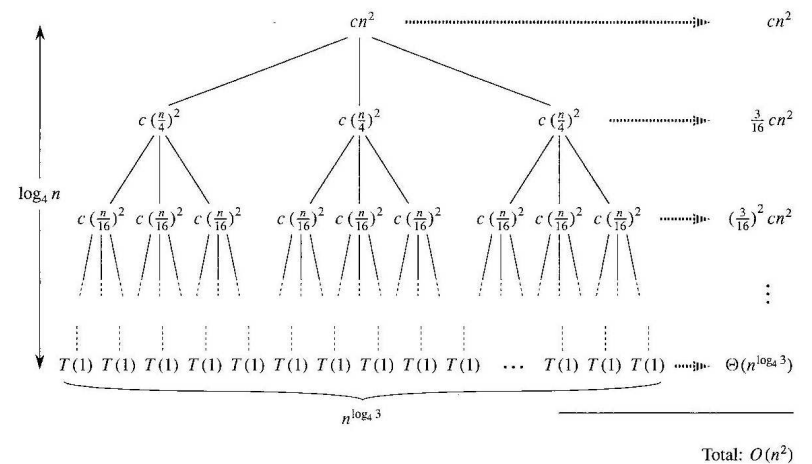
## Árvore de recorrência



## Árvore de recorrência

- O número de níveis é  $\log_4 n + 1$ .
  - No nível  $i$  o tempo gasto (sem contar as chamadas recursivas) é  $\left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2$ .
  - No último nível há  $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$  folhas. Como  $T(1) = \Theta(1)$  o tempo gasto é  $\Theta(n^{\log_4 3})$ .
- Em outras palavras, o tempo gasto é uma função que pertence a  $\Theta(n^{\log_4 3})$ .

## Árvore de recorrência



## Árvore de recorrência

Logo,

$$\begin{aligned}
 T(n) &= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^3 cn^2 + \dots + \\
 &\quad + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
 &= cn^2 \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
 &\leq cn^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i + \Theta(n^{\log_4 3}) = \frac{16}{13}cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}),
 \end{aligned}$$

e  $T(n) \in O(n^2)$ .

## Árvore de recorrência

Mas  $T(n) \in O(n^2)$  é realmente a solução da recorrência original?

Com base na árvore de recorrência, chutamos que  $T(n) \leq dn^2$  para alguma constante  $d > 0$ .

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 \\ &\leq 3d\lfloor n/4 \rfloor^2 + cn^2 \\ &\leq 3d(n/4)^2 + cn^2 \\ &= \frac{3}{16}dn^2 + cn^2 \\ &\leq dn^2 \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vale se  $d \geq (16/13)c$ .  
(Yeeesssss!)

## Vamos tentar juntos?

Eis um exemplo um pouco mais complicado.

Vamos resolver a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= 1 && \text{para } n = 1, 2, \\ T(n) &= T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n && \text{para } n \geq 3. \end{aligned}$$

Qual é a solução da recorrência?

Resposta:  $T(n) \in O(n \lg n)$ . (Exercício)

## Árvore de recorrência

### Resumo

- O número de nós em cada nível da árvore é o número de chamadas recursivas.
- Em cada nó indicamos o “tempo” ou “trabalho” gasto naquele nó que **não** corresponde a chamadas recursivas.
- Na coluna mais à direita indicamos o **tempo total** naquele nível que **não** corresponde a chamadas recursivas.
- Somando ao longo da coluna determina-se a solução da recorrência.

## Recorrências com $O$ à direita (CLRS)

Uma “recorrência”

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(1) && \text{para } n = 1, 2, \\ T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2) && \text{para } n \geq 3 \end{aligned}$$

representa todas as recorrências da forma

$$\begin{aligned} T(n) &= a && \text{para } n = 1, 2, \\ T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + bn^2 && \text{para } n \geq 3 \end{aligned}$$

onde  $a$  e  $b > 0$  são constantes.

As soluções exatas dependem dos valores de  $a$  e  $b$ , mas estão todas na mesma classe  $\Theta$ .

A “solução” é  $T(n) = \Theta(n^2)$ , ou seja,  $T(n) \in \Theta(n^2)$ .

As mesmas observações valem para as classes  $O, \Omega, o, \omega$ .

## Algumas convenções

- É comum usar a notação assintótica para as classes  $O, \Omega, \Theta, o, \omega$  com outro significado.
- Dizemos que um algoritmo tem **complexidade de tempo**  $O(f(n))$  se a função que expressa a complexidade de tempo do algoritmo pertence à classe  $O(f(n))$ .  
Expressões similares valem para  $\Omega, \Theta, o, \omega$ .
- Dizemos que um certo objeto (conjunto, seqüência etc) **tem/contém**  $O(f(n))$  **elementos** se a função que expressa esta quantidade pertence à classe  $O(f(n))$ .

## Cuidados com a notação assintótica

A notação assintótica é muito versátil e expressiva. Entretanto, deve-se tomar alguns cuidados.

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

É similar a recorrência do Mergesort!

Mas eu vou “provar” que  $T(n) = O(n)$ !

## Recorrência do Mergesort

Podemos escrever a recorrência de tempo do **Mergesort** da seguinte forma

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

A solução da recorrência é  $T(n) = \Theta(n \lg n)$ .

A prova é **essencialmente** a mesma do primeiro exemplo. (**Exercício!**)

## Cuidados com a notação assintótica

Vou mostrar que  $T(n) \leq cn$  para alguma constante  $c > 0$ .

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\leq cn + n \\ &= O(n) \quad \Leftarrow \text{ERRADO!!!} \end{aligned}$$

Por quê?

Não foi feito o passo indutivo, ou seja, não foi mostrado que  $T(n) \leq cn$ .

## Teorema Master

- Veremos agora um resultado que descreve soluções para recorrências da forma

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

onde  $a \geq 1$  e  $b > 1$  são constantes.

- O **caso base** é omitido na definição e convencionou-se que é uma **constante** para valores pequenos.
- A expressão  $n/b$  pode indicar tanto  $\lfloor n/b \rfloor$  quanto  $\lceil n/b \rceil$ .
- O Teorema Master **não** fornece a resposta para **todas** as recorrências da forma acima.

## Exemplos onde o TM pode ser usado

- $T(n) = 9T(n/3) + n$   
Solução:  $T(n) = \Theta(n^2)$  (Caso 1 do TM)
- $T(n) = T(2n/3) + 1$   
Solução:  $T(n) = \Theta(\log n)$  (Caso 2 do TM)
- $T(n) = T(3n/4) + n \log n$   
Solução:  $T(n) = \Theta(n \log n)$  (Caso 3 do TM)
- $T(n) = 4T(n/2) + n \log n$   
Solução:  $T(n) = \Theta(n^2)$  (Caso 1 do TM)
- $T(n) = 2T(n/2) + (n + \log n)$   
Solução:  $T(n) = n \log n$  (Caso 2 do TM)

## Teorema Master

### Teorema (Teorema Master (CLRS))

Sejam  $a \geq 1$  e  $b > 1$  constantes, seja  $f(n)$  uma função e seja  $T(n)$  definida para os inteiros não-negativos pela relação de recorrência

$$T(n) = aT(n/b) + f(n).$$

Então  $T(n)$  pode ser limitada assintoticamente da seguinte maneira:

- Se  $f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon})$  para alguma constante  $\epsilon > 0$ , então  $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
- Se  $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ , então  $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
- Se  $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ , para alguma constante  $\epsilon > 0$  e se  $af(n/b) \leq cf(n)$ , para alguma constante  $c < 1$  e para  $n$  suficientemente grande, então  $T(n) \in \Theta(f(n))$

## Exemplos onde o TM não pode ser usado

- $T(n) = T(n-1) + n$
- $T(n) = T(n-a) + T(a) + n$ , ( $a \geq 1$  inteiro)
- $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + n$ , ( $0 < \alpha < 1$ )
- $T(n) = T(n-1) + \log n$
- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$  (por quê?)