MC448 — Análise de Algoritmos I

Cid Carvalho de Souza Cândida Nunes da Silva
Orlando Lee

22 de outubro de 2009

Programação Dinâmica

Programação Dinâmica: Conceitos Básicos

- Tipicamente o paradigma de programação dinâmica aplica-se a problemas de **otimização**.
- Podemos utilizar programação dinâmica em problemas onde há:
  - **Subestrutura Ótima:** As soluções ótimas do problema incluem soluções ótimas de subproblemas.
  - **Sobreposição de Subproblemas:** O cálculo da solução através de recursão implica no recálculo de subproblemas.

Programação Dinâmica: Conceitos Básicos (Cont.)

- A técnica de programação dinâmica visa evitar o recálculo desnecessário das soluções dos subproblemas.
- Para isso, soluções de subproblemas são armazenadas em tabelas.
- Logo, para que o algoritmo de programação dinâmica seja eficiente, é preciso que o número total de subproblemas que devem ser resolvidos seja pequeno (polinomial no tamanho da entrada).

Multiplicação de Cadeias de Matrizes

Problema: Multiplicação de Matrizes

Calcular o número mínimo de operações de multiplicação (escalar) necessários para computar a matriz M dada por:

$$M = M_1 \times M_2 \times \dots M_i \dots \times M_n$$

onde M_i é uma matriz de b_{i-1} linhas e b_i colunas, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

- Matrizes são multiplicadas aos pares sempre. Então, é preciso encontrar uma parentização (agrupamento) ótimo para a cadeia de matrizes.
- Para calcular a matriz M' dada por $M_i \times M_{i+1}$ são necessárias $b_{i-1} * b_i * b_{i+1}$ multiplicações entre os elementos de M_i e M_{i+1}.

Multiplicação de Cadeias de Matrizes (Cont.)

- **Exemplo:** Qual é o mínimo de multiplicações escalares necessárias para computar $M = M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4$ com $b = \{200, 2, 30, 20, 5\}$?
- As possibilidades de parentização são:

$$\begin{array}{lcl}
M = (M_1 \times (M_2 \times (M_3 \times M_4))) & \rightarrow & 5.300 \text{ multiplicações} \\
M = (M_1 \times ((M_2 \times M_3) \times M_4)) & \rightarrow & 3.400 \text{ multiplicações} \\
M = ((M_1 \times M_2) \times (M_3 \times M_4)) & \rightarrow & 45.000 \text{ multiplicações} \\
M = ((M_1 \times (M_2 \times M_3)) \times M_4) & \rightarrow & 29.200 \text{ multiplicações} \\
M = (((M_1 \times M_2) \times M_3) \times M_4) & \rightarrow & 152.000 \text{ multiplicações}
\end{array}$$

- A ordem das multiplicações faz **muita** diferença !

Multiplicação de Cadeias de Matrizes (Cont.)

- Poderíamos calcular o número de multiplicações para todas as possíveis parentizações.
- O número de possíveis parentizações é dado pela recorrência:

$$P(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} P(k) \cdot P(n-k) & n > 1, \end{cases}$$

- Mas $P(n) \in \Omega(4^n / n^{\frac{3}{2}})$, a estratégia de força bruta é impraticável !

Multiplicação de Cadeias de Matrizes (Cont.)

- Inicialmente, para todo (i, j) tal que $1 \leq i \leq j \leq n$, vamos definir as seguintes matrizes:

$$M_{i,j} = M_i \times M_{i+1} \times \dots \times M_j.$$

- Agora, dada uma parentização ótima, existem dois pares de parênteses que identificam o último par de matrizes que serão multiplicadas.
  Ou seja, existe k tal que $M = M_{1,k} \times M_{k+1,n}$.
- Como a parentização de M é ótima, as parentizações no cálculo de $M_{1,k}$ e $M_{k+1,n}$ devem ser ótimas também, caso contrário, seria possível obter uma parentização de M ainda melhor!
- Eis a subestrututra ótima do problema: a parentização ótima de M inclui a parentização ótima de $M_{1,k}$ e $M_{k+1,n}$.

Multiplicação de Cadeias de Matrizes (Cont.)

- De forma geral, se $m[i,j]$ é número mínimo de multiplicações que deve ser efetuado para computar $M_i \times M_{i+1} \times \ldots \times M_j$, então $m[i,j]$ é dado por:

$$m[i,j] := \min_{i \le k < j} \{m[i,k] + m[k+1,j] + b_{i-1} * b_k * b_j\}.$$

- Podemos então projetar um algoritmo recursivo (indutivo) para resolver o problema.

Multiplicação de Matrizes - Algoritmo Recursivo

MinimoMultiplicacoesRecursivo(b,i,j)

▷ **Entrada:** Vetor b com as dimensões das matrizes e os índices i e j que delimitam o início e término da subcadeia.
▷ **Saída:** O número mínimo de multiplicações escalares necessário para computar a multiplicação da subcadeia. Esse valor é registrado em uma tabela ($m[i,j]$), bem como o índice da divisão em subcadeias ótimas ($s[i,j]$).

1. **se** $i = j$ **então devolva** 0
2. $m[i,j] := \infty$
3. **para** $k := i$ **até** $j-1$ **faça**
4. $\quad q := MinimoMultiplicacoesRecursivo(b,i,k) +$ $MinimoMultiplicacoesRecursivo(b,k+1,j) +$ $b[i-1] * b[k] * b[j]$
5. $\quad$ **se** $m[i,j] > q$ **então**
6. $\quad\quad m[i,j] := q$; $s[i,j] := k$
7. **devolva** $m[i,j]$.

Efetuando a Multiplicação Ótima

- É muito fácil efetuar a multiplicação da cadeia de matrizes com o número mínimo de multiplicações escalares usando a tabela s, que registra os índices ótimos de divisão em subcadeias.

MultiplicaMatrizes(M,s,i,j)

▷ **Entrada:** Cadeia de matrizes M, a tabela s e os índices i e j que delimitam a subcadeia a ser multiplicada.
▷ **Saída:** A matriz resultante da multiplicação da subcadeia entre i e j, efetuando o mínimo de multiplicações escalares.

1. **se** $i < j$ **então**
2. $\quad X := MultiplicaMatrizes(M,s,i,s[i,j])$
3. $\quad Y := MultiplicaMatrizes(M,s,s[i,j]+1,j)$
4. $\quad$ **devolva** $Multiplica(X, Y, b[i-1], b[s[i,j]], b[j])$
5. **senão devolva** M_i;

Algoritmo Recursivo - Complexidade

- O número mínimo de operações feita pelo algoritmo recursivo é dada pela recorrência:

$$T(n) \ge \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1 + \sum_{k=1}^{n-1}[T(k) + T(n-k) + 1] & n > 1, \end{cases}$$

- Portanto, $T(n) \ge 2\sum_{k=1}^{n-1} T(k) + n$, para $n > 1$.
- É possível provar (por substituição) que $T(n) \ge 2^{n-1}$, ou seja, o algoritmo recursivo tem complexidade $\Omega(2^n)$, ainda impraticável!

Algoritmo Recursivo - Complexidade

- A ineficiência do algoritmo recursivo deve-se à sobreposição de subproblemas: o cálculo do mesmo $m[i, j]$ pode ser requerido em vários subproblemas.
- Por exemplo, para $n = 4$, $m[1, 2]$, $m[2, 3]$ e $m[3, 4]$ são computados duas vezes.
- O número de total de $m[i, j]$'s calculados é apenas $O(n^2)$!
- Portanto, podemos obter um algoritmo mais eficiente se evitarmos recálculos de subproblemas.

Memorização x Programação Dinâmica

- Existem duas técnicas para evitar o recálculo de subproblemas:
  - **Memorização:** Consiste em manter a estrutura recursiva do algoritmo, registrando em uma tabela o valor ótimo para subproblemas já computados e verificando, antes de cada chamada recursiva, se o subproblema a ser resolvido já foi computado.
  - **Programação Dinâmica:** Consiste em preencher uma tabela que registra o valor ótimo para cada subproblema de forma apropriada, isto é, a computação do valor ótimo de cada subproblema depende somente de subproblemas já previamente computados. Elimina completamente a recursão.

Algoritmo de Memorização

MinimoMultiplicacoesMemorizado(b, n)

1. **para** $i := 1$ **até** n **faça**
2.   **para** $j := 1$ **até** n **faça**
3. $m[i, j] := \infty$
4. **devolva** $Memorizacao(b, 1, n)$

Memorizacao(b, i, j)

1. **se** $m[i, j] < \infty$ **então devolva** $m[i, j]$
2. **se** $i = j$ **então** $m[i, j] := 0$
3. **senão**
4.   **para** $k := i$ **até** $j - 1$ **faça**
5. $q := Memorizacao(b, i, k)+$ $Memorizacao(b, k + 1, j) + b[i - 1] * b[k] * b[j];$
6.   **se** $m[i, j] > q$ **então** $m[i, j] := q$; $s[i, j] := k$
7. **devolva** $m[i, j]$

Algoritmo de Programação Dinâmica

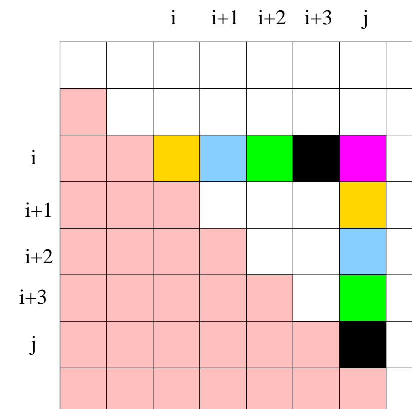
- O uso de programação dinâmica é preferível pois elimina completamente o uso de recursão.
- O algoritmo de programação dinâmica para o problema da multiplicação de matrizes é o seguinte: inicialmente a diagonal principal da tabela é preenchida com zeros.
- A partir daí as entradas das diagonais "à direita" são calculadas usando a recorrência. Note que as entradas da diagonal começando em $m[1, j]$ correspondem aos subproblemas com cadeias de j matrizes.

Algoritmo de Programação Dinâmica

MinimoMultiplicacoes(b)

```
▷ Entrada: Vetor b com as dimensões das matrizes.
▷ Saída: As tabelas m e s preenchidas.
1. para i = 1 até n faça m[i,i] := 0
   ▷ calcula o mínimo de todas sub-cadeias de tamanho u + 1
2. para u = 1 até n − 1 faça
3.     para i = 1 até n − u faça
4.         j := i + u; m[i,j] := ∞
5.         para k = i até j − 1 faça
6.             q := m[i,k] + m[k+1,j] + b[i−1] * b[k] * b[j]
7.             se q < m[i,j] então
8.                 m[i,j] := q; s[i,j] := k
9. devolva (m,s)
```


Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo



Note que para calcular $m[i,j]$ é preciso conhecer apenas as entradas da tabela m que estão nas diagonais anteriores.

Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo

m

	1	2	3	4
1	0			
2		0		
3			0	
4				0

s

	1	2	3	4
1	_			
2		_		
3			_	
4				_

Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo

m

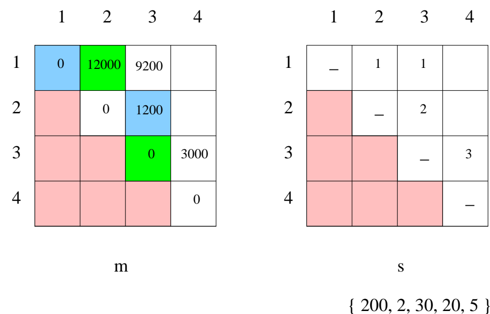
	1	2	3	4
1	0	12000		
2		0	1200	
3			0	3000
4				0

s

	1	2	3	4
1	_	1		
2		_	2	
3			_	3
4				_

{ 200, 2, 30, 20, 5 }

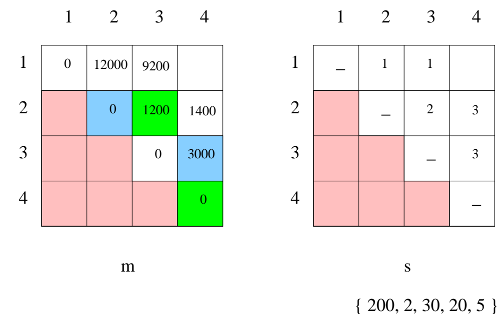
Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo



b0*b1*b3=200*2*20=8000

b0*b2*b3=200*30*20=120000

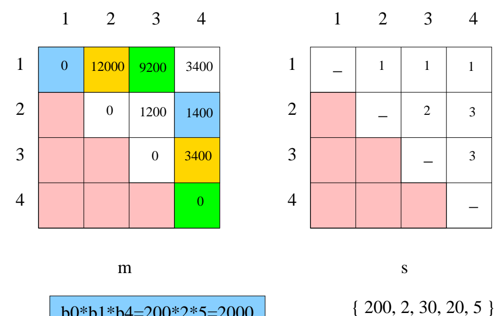
Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo



b1*b2*b4=2*30*5=300

b1*b3*b4=2*20*5=200

Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo



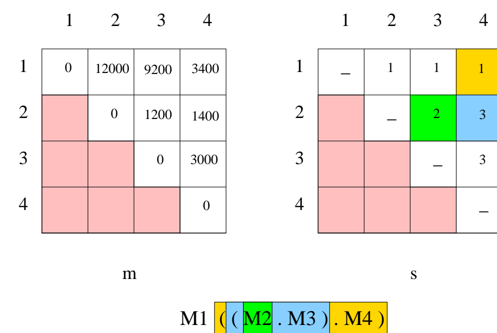
b0*b1*b4=200*2*5=2000

b0*b2*b4=200*30*5=30000

b0*b3*b4=200*20*5=20000

{ 200, 2, 30, 20, 5 }

Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo



Algoritmo de Programação Dinâmica - Complexidade

- A complexidade de tempo do algoritmo é dada por:

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-u} \sum_{k=i}^{i+u-1} \Theta(1) \\ &= \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-u} u \, \Theta(1) \\ &= \sum_{u=1}^{n-1} u(n-u) \, \Theta(1) \\ &= \sum_{u=1}^{n-1} (nu - u^2) \, \Theta(1). \end{aligned}$$

Algoritmo de Programação Dinâmica - Complexidade

- Como

$$\sum_{u=1}^{n-1} nu = n^3/2 - n^2/2$$

e

$$\sum_{u=1}^{n-1} u^2 = n^3/3 - n^2/2 + n/6.$$

Então,

$$T(n) = (n^3/6 - n/6)\, \Theta(1).$$

- A complexidade de tempo do algoritmo é $\Theta(n^3)$.
- A complexidade de espaço é $\Theta(n^2)$, já que é necessário armazenar a matriz com os valores ótimos dos subproblemas.

O Problema Binário da Mochila

O Problema da Mochila

Dada uma mochila de capacidade W (inteiro) e um conjunto de n itens com tamanho w_i (inteiro) e valor c_i associado a cada item i, queremos determinar quais itens devem ser colocados na mochila de modo a **maximizar** o valor total transportado, respeitando sua capacidade.

- Podemos fazer as seguintes suposições:
  - $\sum_{i=1}^{n} w_i > W$;
  - $0 < w_i \leq W$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

O Problema Binário da Mochila

- Podemos formular o problema da mochila com Programação Linear Inteira:
  - Criamos uma variável x_i para cada item: $x_i = 1$ se o item i estiver na solução ótima e $x_i = 0$ caso contrário.
  - A modelagem do problema é simples:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \qquad (2)$$

$$x_i \in \{0, 1\} \qquad (3)$$

- (1) é a função objetivo e (2-3) o conjunto de restrições.

O Problema Binário da Mochila

- Como podemos projetar um algoritmo para resolver o problema?
- Existem 2^n possíveis subconjuntos de itens: um algoritmo de força bruta é impraticável!
- É um problema de otimização. Será que tem subestrutura ótima?
- Se o item n estiver na solução ótima, o valor desta solução será c_n mais o valor da melhor solução do problema da mochila com capacidade $W - w_n$ considerando-se só os $n-1$ primeiros itens.
- Se o item n não estiver na solução ótima, o valor ótimo será dado pelo valor da melhor solução do problema da mochila com capacidade W considerando-se só os $n-1$ primeiros itens.

O Problema Binário da Mochila

- Seja $z[k,d]$ o valor ótimo para o problema da mochila considerando os k primeiros itens (de tamanho $w_1, \ldots, w_k$) e uma mochila de capacidade d.
- A fórmula de recorrência para computar $z[k,d]$ para todo valor de d e k é:

$$z[0,d] = 0$$
$$z[k,0] = 0$$
$$z[k,d] = \begin{cases} z[k-1,d], & \text{se } w_k > d \\ \max\{z[k-1,d], z[k-1,d-w_k] + c_k\}, & \text{se } w_k \le d \end{cases}$$

O Problema Binário da Mochila - Complexidade Recursão

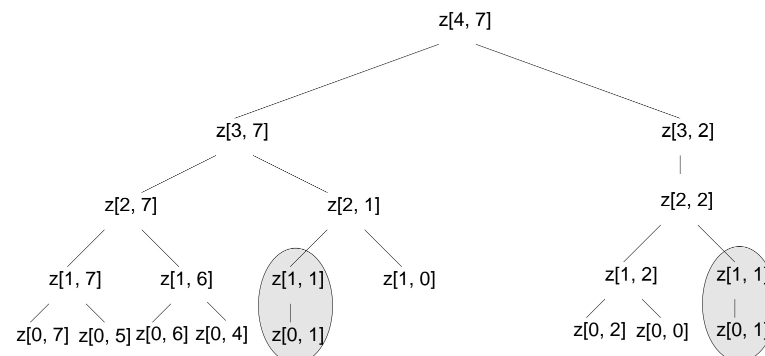
- A complexidade do algoritmo recursivo para este problema no pior caso é dada pela recorrência:

$$T(k,d) = \begin{cases} 1, & k = 0 \text{ ou } d = 0 \\ T(k-1,d) + T(k-1,d-w_k) + 1 & k > 0 \text{ e } d > 0. \end{cases}$$

- Portanto, no pior caso, o algoritmo recursivo tem complexidade $\Omega(2^n)$. É impraticável!
- Mas há sobreposição de subproblemas: o recálculo de subproblemas pode ser evitado!

Mochila - Sobreposição de Subproblemas

- Considere vetor de tamanhos $w = \{2,1,6,5\}$ e capacidade da mochila $W = 7$. A árvore de recursão seria:

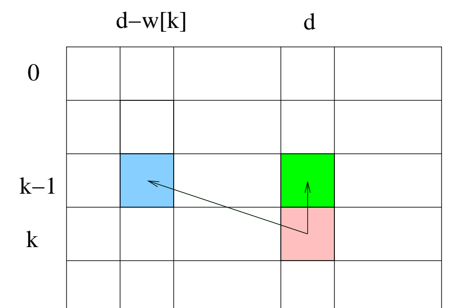


- O subproblema $z[1,1]$ é computado duas vezes.

Mochila - Programação Dinâmica

- O número total máximo de subproblemas a serem computados é nW.
- Isso porque tanto o tamanho dos itens quanto a capacidade da mochila são inteiros!
- Podemos então usar programação dinâmica para evitar o recálculo de subproblemas.
- Como o cálculo de $z[k, d]$ depende de $z[k-1, d]$ e $z[k-1, d-w_k]$, preenchemos a tabela linha a linha, da esquerda para a direita.

Mochila



z[k,d]=max { z[k−1,d] , z[k−1,d−w[k]] + c[k] }

O Problema Binário da Mochila - Algoritmo

Mochila(c, w, W, n)

▷ **Entrada:** Vetores c e w com valor e tamanho de cada item, capacidade W da mochila e número de itens n.
▷ **Saída:** O valor máximo do total de itens colocados na mochila.

1. **para** $d := 0$ **até** W **faça** $z[0, d] := 0$
2. **para** $k := 1$ **até** n **faça** $z[k, 0] := 0$
3. **para** $k := 1$ **até** n **faça**
4.   **para** $d := 1$ **até** W **faça**
5. $z[k, d] := z[k-1, d]$
6.   **se** $w_k \leq d$ **e** $c_k + z[k-1, d-w_k] > z[k, d]$ **então**
7. $z[k, d] := c_k + z[k-1, d-w_k]$
8. **devolva** $(z[n, W])$

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0							
2	0							
3	0							
4	0							

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0							
3	0							
4	0							

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0							
4	0							

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0	7	10	17	17	17	25	32
4	0							

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0	7	10	17	17	17	25	32
4	0	7	10	17	17	24	31	34

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0	7	10	17	17	17	25	32
4	0	7	10	17	17	24	31	34

Mochila - Complexidade

- Claramente, a complexidade do algoritmo de programação dinâmica para o problema da mochila é $O(nW)$.
- É um algoritmo pseudo-polinomial: sua complexidade depende do valor de W, parte da entrada do problema.
- O algoritmo não devolve o subconjunto de valor total máximo, apenas o valor máximo.
- Veremos daqui a pouco que é fácil recuperar o subconjunto a partir da tabela z preenchida.

Programação dinâmica versus memorização

- Para casos particulares, uma implementação com memorização pode ser muito mais eficiente (embora não seja polinomial ainda).
- Por exemplo, suponha que os pesos dos itens são múltiplos de 7. Os valores dos subproblemas podem ser armazenados em uma tabela de hash.

Mochila - Recuperação da Solução

MochilaSolucao(z, n, W)

▷ **Entrada:** Tabela z preenchida, capacidade W da mochila e número de itens n.
▷ **Saída:** O vetor x que indica os itens colocados na mochila.
  para $i := 1$ **até** n **faça** $x[i] := 0$
  MochilaSolucaoAux(x, z, n, W)
  devolva (x)

MochilaSolucaoAux(x, z, k, d)

se $k \neq 0$ **então**
  se $z[k, d] = z[k-1, d]$ **então**
    $x[k] := 0$; *MochilaSolucaoAux*$(x, z, k-1, d)$
  senão
    $x[k] := 1$; *MochilaSolucaoAux*$(x, z, k-1, d-w_k)$

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0	7	10	17	17	17	25	32
4	0	7	10	17	17	24	31	**34**

$x[4] = ?$

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0	7	**10**	17	17	17	25	32
4	0	7	10	17	17	24	31	**34**

$x[3] = ?$ $x[4] = 1$

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	**10**	17	17	17	17	17
3	0	7	**10**	17	17	17	25	32
4	0	7	10	17	17	24	31	**34**

$x[2] = ?$ $x[3] = 0$ $x[4] = 1$

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	**10**	10	10	10	10	10
2	0	7	**10**	17	17	17	17	17
3	0	7	**10**	17	17	17	25	32
4	0	7	10	17	17	24	31	**34**

$x[1] = ?$ $x[2] = 0$ $x[3] = 0$ $x[4] = 1$

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

k \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	10	10	10	10	10	10
2	0	7	10	17	17	17	17	17
3	0	7	10	17	17	17	25	32
4	0	7	10	17	17	24	31	34

$x[1] = 1 \quad x[2] = 0 \quad x[3] = 0 \quad x[4] = 1$

Mochila - Complexidade

- O algoritmo de recuperação da solução tem complexidade $O(n)$.
- Portanto, a complexidade de tempo e de espaço do algoritmo de programação dinâmica para o problema da mochila é $O(nW)$.
- É possível economizar memória, registrando duas linhas: a que está sendo preenchida e a anterior. Mas isso inviabiliza a recuperação da solução.

Subcadeia comum máxima

Definição: Subcadeia

Dada uma cadeia $S = a_1 \ldots a_n$, dizemos que $S' = b_1 \ldots b_p$ é uma *subcadeia* de S se S' pode ser obtido a partir de S apagando-se alguns caracteres.

- **Exemplo:** considere a cadeia $S = ABCDEFG$.

  $ADFG$, B, $ABCDEFG$ são subcadeias de S.

  IJK, $ACGE$, $AADE$ **não** são subcadeias de S.

Problema da Subcadeia Comum Máxima

Dadas duas cadeias de caracteres X e Y de um alfabeto Σ, determinar a maior subcadeia comum de X e Y

Subcadeia comum máxima (cont.)

- É um problema de otimização. Será que tem subestrutura ótima?
- **Notação:** Seja S uma cadeia de tamanho n. Para todo $i = 1, \ldots, n$, o prefixo de tamanho i de S será denotado por S_i.
- **Exemplo:** Para $S = ABCDEFG$, $S_2 = AB$ e $S_4 = ABCD$.
- **Definição:** $c[i, j]$ é o tamanho da subcadeia comum máxima dos prefixos X_i e Y_j. Logo, se $|X| = m$ e $|Y| = n$, $c[m, n]$ é o valor ótimo.

Subcadeia comum máxima (cont.)

- **Teorema (subestrutura ótima):** Seja $Z = z_1 \dots z_k$ a subcadeia comum máxima de $X = x_1 \dots x_m$ e $Y = y_1 \dots y_n$, denotado por $Z = \text{SCM}(X, Y)$.
  1. Se $x_m = y_n$ então $z_k = x_m = y_n$ e $Z_{k-1} = \text{SCM}(X_{m-1}, Y_{n-1})$.
  2. Se $x_m \neq y_n$ então $z_k \neq x_m$ implica que $Z = \text{SCM}(X_{m-1}, Y)$.
  3. Se $x_m \neq y_n$ então $z_k \neq y_n$ implica que $Z = \text{SCM}(X, Y_{n-1})$.
- **Fórmula de Recorrência:**

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \text{ ou } j = 0 \\ c[i-1,j-1]+1 & \text{se } i,j > 0 \text{ e } x_i = y_j \\ \max\{c[i-1,j], c[i,j-1]\} & \text{se } i,j > 0 \text{ e } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Subcadeia comum máxima (cont.)

SCM(X, m, Y, n, c, b)

01. **para** $i = 0$ **até** m **faça** $c[i,0] := 0$
02. **para** $j = 1$ **até** n **faça** $c[0,j] := 0$
03. **para** $i = 1$ **até** m **faça**
04. **para** $j = 1$ **até** n **faça**
05. **se** $x_i = y_j$ **então**
06. $c[i,j] := c[i-1,j-1]+1$; $b[i,j] :=$ "↖"
07. **senão**
08. **se** $c[i,j-1] > c[i-1,j]$ **então**
09. $c[i,j] := c[i,j-1]$; $b[i,j] :=$ "←"
10. **senão**
11. $c[i,j] := c[i-1,j]$; $b[i,j] :=$ "↑";
12. **devolva** $(c[m,n], b)$.

Subcadeia comum máxima - Exemplo

- **Exemplo:** $X = abcb$ e $Y = bdcab$, $m = 4$ e $n = 5$.

X \ Y			b	d	c	a	b
		0	1	2	3	4	5
	0	0	0	0	0	0	0
a	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	1	1	1	1	2
c	3	0	1	1	2	2	2
b	4	0	1	1	2	2	3

X \ Y			b	d	c	a	b
		0	1	2	3	4	5
	0						
a	1		↑	↑	↑	↖	←
b	2		↖	←	←	↑	↖
c	3		↑	↑	↖	←	↑
b	4		↖	↑	↑	↑	↖

Subcadeia comum máxima - Complexidade

- Claramente, a complexidade do algoritmo é $O(mn)$.
- O algoritmo não encontra a subcadeia comum de tamanho máximo, apenas seu tamanho.
- Com a tabela b preenchida, é fácil encontrar a subcadeia comum máxima.

Subcadeia comum máxima (cont.)

- Para recuperar a solução, basta chamar *Recupera_MSC*(b, X, m, n).

Recupera_SCM(b, X, i, j)

1. **se** $i = 0$ e $j = 0$ **então retorne**
2. **se** $b[i, j] =$ "↖" **então**
3.   *Recupera_MSC*$(b, X, i-1, j-1)$; **imprima** x_i
4. **senão**
5.   **se** $b[i, j] =$ "↑" **então**
6.   *Recupera_MSC*$(b, X, i-1, j)$
7.   **senão**
8.   *Recupera_MSC*$(b, X, i, j-1)$

Subcadeia comum máxima - Complexidade

- Dada b podemos determinar a subcadeia comum máxima em tempo $O(m+n)$ no pior caso.
- Portanto, a complexidade de tempo e de espaço do algoritmo de programação dinâmica para o problema da subcadeia comum máxima é $O(mn)$.
- Note que a tabela b é dispensável, podemos economizar memória recuperando a solução a partir da tabela c. Ainda assim, o gasto de memória seria $O(mn)$.
- Caso não haja interesse em determinar a subcadeia comum máxima, mas apenas seu tamanho, é possível reduzir o gasto de memória para $O(\min\{n, m\})$: basta registrar apenas a linha da tabela sendo preenchida e a anterior.