MC448 — Análise de Algoritmos I

Cid Carvalho de Souza   Cândida Nunes da Silva
Orlando Lee

11 de novembro de 2009

Componentes fortemente conexos

Componentes fortemente conexos (CFC)

- Uma aplicação clássica de busca em profundidade:

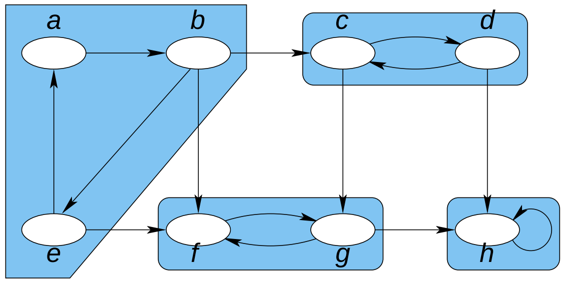
  decompor um grafo orientado em seus componentes fortemente conexos.
- Muitos algoritmos em grafos começam com tal decomposição.
- O algoritmo opera separadamente em cada componente fortemente conexo.
- As soluções são combinadas de alguma forma.

Componentes fortemente conexos

Um componente fortemente conexo de um grafo orientado $G = (V, E)$ é um subconjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que:

1. Para todo par de vértices u e v em C, existe um caminho (orientado) de u a v e vice-versa.
2. C é maximal com respeito à propriedade (1).

Componentes fortemente conexos



Um grafo orientado e seus componentes fortemente conexos.

Grafo transposto

Seja $G = (V, E)$ um grafo orientado.

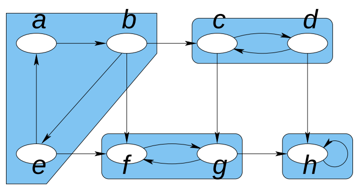
O grafo transposto de G é o grafo $G^T = (V^T, E^T)$ tal que

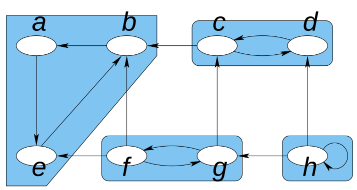
- $V^T = V$ e
- $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$.

Ou seja, G^T é obtido a partir de G invertendo as orientações das arestas.

Dada uma representação de listas de adjacências de G é possível obter a representação de listas de adjacências de G^T em tempo $\Theta(V + E)$.

Grafo transposto





Um grafo orientado e o grafo transposto. Note que eles têm os mesmos componentes fortemente conexos.

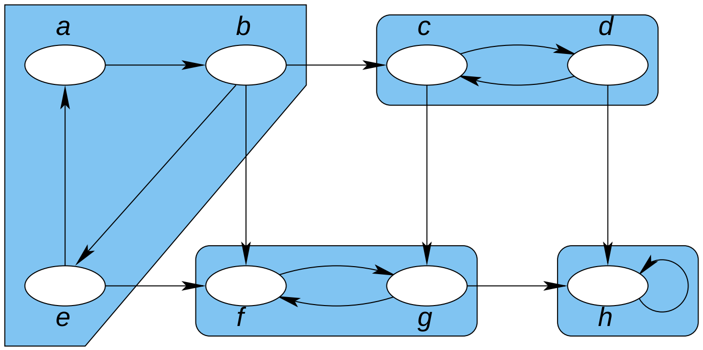
Algoritmo

COMPONENTES-FORTEMENTE-CONEXOS(G)

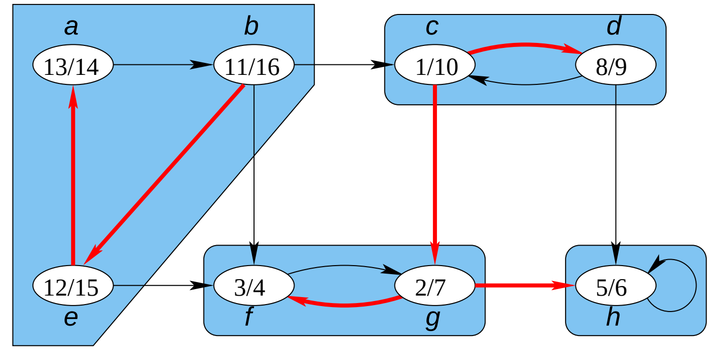
1. Execute DFS(G) para obter $f[v]$ para $v \in V$.
2. Execute DFS(G^T) considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3. Devolva os conjuntos de vértices de cada árvore da Floresta de Busca em Profundidade obtida.

Veremos que os conjuntos devolvidos são exatemente os componentes fortemente conexos de G.

Exemplo CLRS

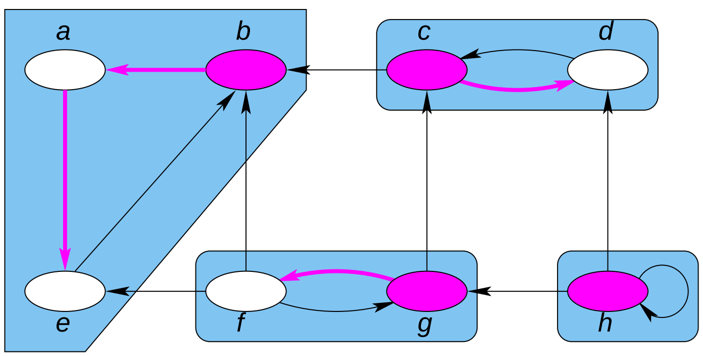


Exemplo CLRS



1 Execute DFS(G) para obter $f[v]$ para $v \in V$.

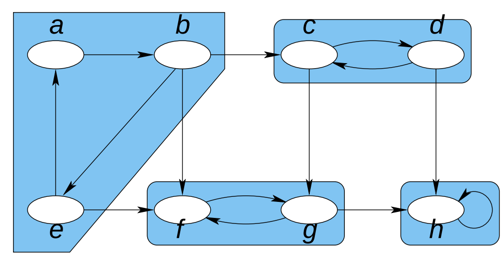
Exemplo CLRS



2 Execute DFS(G^T) considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3 Os componentes fortemente conexos correspondem aos vértices de cada árvore da Floresta de Busca em Profundida.

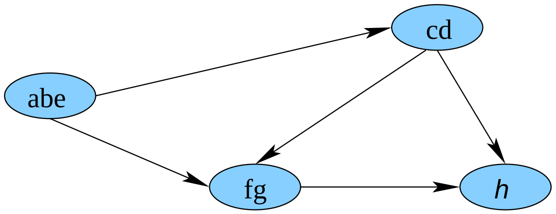
Grafo Componente

A idéia por trás de COMPONENTES-FORTEMENTE-CONEXOS segue de uma propriedade do grafo componente G^{CFC} obtido a partir de G **contraindo-se** seus componentes fortemente conexos.



Grafo Componente

A idéia por trás de COMPONENTES-FORTEMENTE-CONEXOS segue de uma propriedade do grafo componente G^{CFC} obtido a partir de G **contraindo-se** seus componentes fortemente conexos.



G^{CFC} é acíclico.

Os componentes fortementes conexos são visitados em ordem topológica com relação a G^{CFC}!

Corretude

Lema 22.13 (CLRS)

Sejam C e C' dois componentes fortemente conexos de G.
Sejam $u, v \in C$ e $u', v' \in C'$.
Suponha que existe um caminho $u \rightsquigarrow u'$ em G.
Então **não existe** um caminho $v' \rightsquigarrow v$ em G.

O lema acima mostra que G^{CFC} é acíclico.

Agora vamos mostrar porque COMPONENTES-FORTEMENTE-CONEXOS funciona.

Corretude

Daqui pra frente d, f referem-se à busca em profundidade em G feita no passo 1 do algoritmo.

Definição:

Para todo subconjunto U de vértices denote

$$d(U) := \min_{u \in U}\{d[u]\} \quad \text{e} \quad f(U) := \max_{u \in U}\{f[u]\}.$$

Ou seja, $d(U)$ é o instante em que o primeiro vértice de U foi descoberto e $f(U)$ é o instante em que o último vértice de U foi finalizado.

Corretude

Lema 22.14 (CLRS):

Sejam C e C' dois componentes f.c. de G.
Suponha que existe (u, v) em E onde $u \in C$ e $v \in C'$.
Então $f(C) > f(C')$.

Prova: Temos dois casos:

- $d(C) < d(C')$: seja x o primeiro vértice de C que foi descoberto. Logo $d[x] = d(C)$. No instante $d[x]$, existe um caminho branco de de x a todo vértice de $C \cup C'$. Então todos os vértices de $C \cup C'$ são descendentes de x e portanto $f(C') < f[x] \leq f(C)$.
- $d(C) > d(C')$: o primeiro vértice de $C \cup C'$ a ser descoberto pertence a C'. Logo, todos os vértices de C' serão finalizados antes de qualquer vértice de C ser descoberto. Isso mostra que $f(C) > f(C')$.

Corretude

Corolário 22.15 (CLRS):
Sejam C e C' dois componentes fortemente conexos de G. Suponha que existe (u, v) está em E^T onde $u \in C$ e $v \in C'$. Então $f(C) < f(C')$.

Segue do fato de que G e G^T terem os mesmos componentes fortemente conexos e do lema anterior.

Corretude

COMPONENTES-FORTEMENTE-CONEXOS(G)

1. Execute DFS(G) para obter $f[v]$ para $v \in V$.
2. Execute DFS(G^T) considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3. Devolva os conjuntos de vértices de cada árvore da Floresta de Busca em Profundidade obtida.

Teorema 22.16 (CLRS):
O algoritmo COMPONENTES-FORTEMENTE-CONEXOS determina corretamente os componentes fortemente conexos de G em tempo $O(V + E)$.

Corretude

Prova: (CLRS)

Vamos provar por **indução** no número de árvores produzidas na linha 3 que os vértices de cada árvore são componentes fortemente conexos.

Base: $k = 0$ (trivial)

Hipótese de indução: as primeiras k árvores produzidas na linha 3 são componentes fortemente conexos.

Corretude

Passo de indução: considere a $(k + 1)$-ésima árvore produzida pelo algoritmo. Vamos mostrar que seu conjunto de vértices é um componente fortemente conexo.

Seja u a raiz desta árvore e seja C o componente fortemente conexo ao qual u pertence.

Pela escolha do algoritmo, $f(C) > f(C')$ para qualquer outro componente fortemente conexo C' que consiste de vértices ainda não visitados em DFS(G^T).

Corretude

Pela hipótese de indução, no instante $d[u]$ todos os vértices de C são brancos. Assim, todos os vértices de C tornam-se descendentes de u na árvore de busca de G^T.

Pela hipótese de indução e pelo Corolário 22.15, qualquer aresta que sai de C só pode entrar em uma das k componentes já visitadas.

Logo, apenas os vértices de C estão na árvore de busca em profundidade de G^T com raiz u.